LISTA APERTA

Lista Aperta è un gruppo di studenti del Politecnico di Milano che organizza diverse attività culturali all'interno dell'ateneo.

Anche quest'anno organizziamo un corso per venire incontro alle difficoltà degli studenti di fronte al test d'ammissione: il Pretest.

Il Pretest non ha tanto la pretesa di fornire una conoscenza completa delle materie (impossibile in soli tre giorni!) quanto piuttosto a fornire nozioni di base, prendere confidenza col meccanismo delle domande e col tempo a disposizione.

Il Pretest è completamente gratuito, grazie al contributo del Politecnico di Milano.

La formula del Pretest per ingegneria è semplice: tre giorni di lezioni ed esercitazioni con simulazione finale.

Per informazioni: www.pretest.it
pretest.ingegneria@gmail.com

Con il patrocinio di:

POLITECNICO DI MILANO
Piazza Leonardo Da Vinci 32

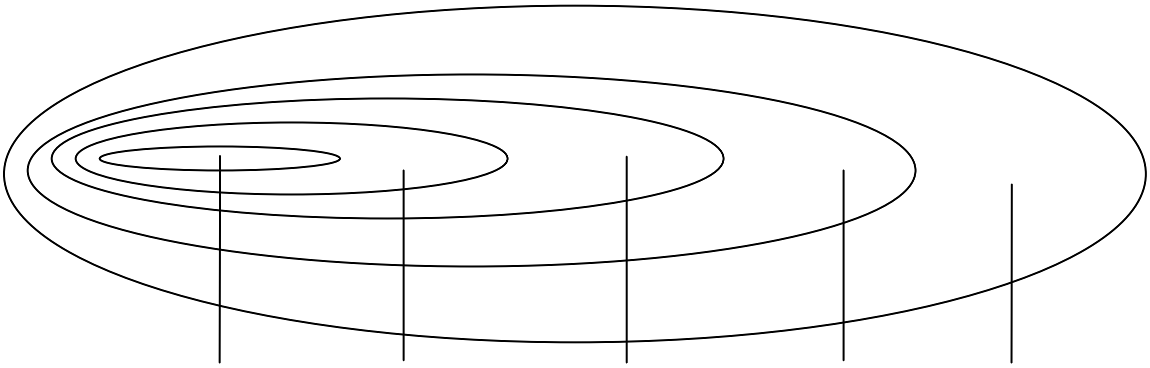
INDICE

INSIEMI NUMERICI

1. SIMBOLI DI USO CORRENTE

N = {0,1,2,3,…}	Insieme dei numeri naturali
N* oppure $\boldsymbol{N_0}$	Insieme dei numeri naturali diversi da zero
Z = {…,–2,–1,0,+1,…}	Insieme dei numeri interi relativi
Z* oppure $\boldsymbol{Z_0}$	Insieme dei numeri interi relativi diversi da zero
Q	Insieme dei numeri razionali (se $\boldsymbol{Q^+}$ insieme dei numeri razionali non negativi)
Q* oppure $\boldsymbol{Q_0}$	Insieme dei numeri razionali non nulli
R	Insieme dei numeri reali (se $\boldsymbol{R^+}$ insieme dei numeri reali non negativi)
R* oppure $\boldsymbol{R_0}$	Insieme dei numeri reali non nulli
Ø	Insieme vuoto
$n \neq m$	*n* è diverso da *m*
$n \equiv m$	*n* coincide con *m*
$n \geq m$	*n* è maggiore o uguale a *m*, *n* è non minore di *m*
$n \leq m$	*n* è minore o uguale a *m*, *n* è non maggiore di *m*
$n \wedge m$ oppure n^m	*n* elevato alla *m*
$\{a, b, c, d ...\}$	Insieme formato dagli elementi *a,b,c,d,…*
$n \in A$	*n* appartiene all'insieme *A* (*n* è elemento dell'insieme *A*)
$n \notin A$	*n* non appartiene all'insieme *A* (*n* non è elemento dell'insieme *A*)
$A \subseteq B$	*A* è contenuto in *B*, *A* è sottoinsieme dell'insieme *B*
$A \cup B$	Insieme unione di *A* e *B*: l'insieme degli elementi appartenenti almeno a uno degli insiemi *A* e *B*
$A \cap B$	Insieme intersezione di *A* e *B*: l'insieme degli elementi che appartengono sia ad *A* che a *B*
$A = B$	L'insieme *A* è uguale all'insieme *B* (è costituito dagli stessi elementi)
$A \neq B$	L'insieme *A* *non* è uguale all'insieme *B* (*non è* costituito dagli stessi elementi)
$A \times B$	Prodotto cartesiano degli insiemi *A* e *B*: insieme di tutte le coppie ordinate che hanno il primo elemento in *A* e il secondo elemento in *B*
$a \Rightarrow b$	*a* implica *b* (se *a*, allora *b*)
$a \Leftrightarrow b$	*a* implica *b* e *b* implica *a*: condizione necessaria e sufficiente (*a* se e solo se *b*)
$\forall a$	Per ogni *a*, qualunque sia
$\exists n$	Esiste *n* (se con ! esiste uno ed uno solo)
∞	Infinito
AB	Segmento di estremi *A* e *B*
$A\hat{O}B$	Angolo di lati *AO*, *BO* e vertice *O*
$r \parallel s$	*r* è parallelo a *s*
$r \perp s$	*r* è perpendicolare a *s*
$F : A \rightarrow B$	Funzione di *A* in *B*
$F(x)$	Immagine mediante *f dell'elemento x* del dominio in *B*
$F(A)$	Immagine dell'insieme *A*, sottoinsieme del dominio, mediante *f* in *B*
$F^{-1}(x)$	Funzione inversa di *f*
gof	Prodotto, o composizione, della funzione *f* per *g*: $g \circ f = g(f(x))$

2. INSIEMI NUMERICI E STRUTTURE



2.1 NUMERI NATURALI

I numeri naturali costituiscono un insieme infinito generalmente indicato con il simbolo $N = \{1,2,3...n...\}$

Struttura di N

Nell'insieme dei numeri naturali N *è possibile stabilire un ordinamento, ed è possibile fare delle operazioni.*

<u>Ordinamento</u>: *dati due numeri naturali qualsiasi,* a *e* b*, vale una e una sola delle seguenti possibilità:*
$a < b$ oppure $a = b$ oppure $a > b$ *(legge della tricotomia)*

<u>*Operazioni*</u>*:* *dati due numeri naturali qualsiasi,* a *e* b*, è sempre possibile trovare:*
un numero naturale c **:** $a + b = c$ *(*c *è detto somma di* a *e* b*)*
un numero naturale d **:** $a \cdot b = d$ *(*d *è detto prodotto di* a *e* b*)*

<u>*Divisibiltà*</u>*:* *dati due numeri naturali qualsiasi, a e b, b è divisore di a se* a / b *non dà resto.*

Un numero intero che ha come unici divisori se stesso e 1, si dice primo.

I principali criteri di divisibilità sono:
- *per 2 se l'ultima cifra è divisibile per due (cioè se è pari)*
- *per 3 se la somma delle sue cifre è divisibile per 3*
- *per 4 se il numero formato dalle sue due ultime cifre è divisibile per 4*
- *per 5 se l'ultima cifra è 0 oppure 5*
- *per 6 se è divisibile per 2 e per 3*
- *per 9 se la somma delle sue cifre è divisibile per 9*
- *per 11 se la somma a segni alterni delle sue cifre è divisibile per 11*

2.2 OPERAZIONI E PROPRIETÀ

Addizione $a+b=c$ *sempre possibile in* $N \quad Z \quad Q \quad R$	Commutativa: $a+b=b+a$ Associativa: $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$
Sottrazione $a-b=c \Leftrightarrow b+c=a$ *sempre possibile in* $Z \quad Q \quad R$	Invariantiva: $a-b=(a\pm c)-(b\pm c)$
Moltiplicazione $a\cdot b=c$ *sempre possibile in* $N \quad Z \quad Q \quad R$	Commutativa: $a\cdot b=b\cdot a$ Associativa: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c$ Distributiva rispetto alla somma e alla sottrazione: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
Divisione $a:b=c \Leftrightarrow b\cdot c=a$ *possibile in* $Q \quad R$ ***IMPOSSIBILE*** *se* $b=0$ ***INDETERMINATA*** *se* $a=0$, $b=0$	Invariantiva: $a:b=(a:c):(b:c)=(a\cdot c):(b\cdot c)$ ***se*** $c\neq 0$ Distributiva rispetto alla somma e alla sottrazione: $(a+b):c=a:c+b:c$

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

MCD *(Massimo Comune Divisore): è il più grande fra tutti i numeri interi positivi che dividono tutti i numeri dati. Come si calcola: si scompongono i numeri dati in fattori primi, quindi si moltiplicano i* ***fattori comuni*** *con il minimo esponente.*

Es. MCD (24; 144; 60) = 12

$24 = 2^3 \cdot 3$
$144 = 2^4 \cdot 3^2$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

MCD = $2^2 \cdot 3 = 12$

mcm *(Minimo Comune Multiplo): è il più piccolo multiplo di tutti i numeri dati tra i numeri interi positivi. Come si calcola: si scompongono i numeri dati in fattori primi, quindi si moltiplicano i* ***fattori comuni e non comuni*** *con massimo esponente.*

Es. mcm (24; 144; 60) = 720

$24 = 2^3 \cdot 3$
$144 = 2^4 \cdot 3^2$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

mcm = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

N.B: se due numeri non hanno divisori in comune oltre a 1 e a loro stessi, allora essi si dicono **primi tra loro**

Es. 189 e 260 sono primi tra loro infatti:
$189 = 3^3 \cdot 7$
$260 = 13 \cdot 5 \cdot 2^2$

2.3 NUMERI INTERI RELATIVI

I numeri relativi costituiscono un insieme infinito indicato con il simbolo $Z = \{-n...,-2,-1,0,+1,+2,+3+n...\}$

Valore assoluto di un numero relativo:
il valore assoluto di un numero relativo a *(indicato con* $|a|$*) è il numero stesso, se questo è positivo o nullo, il suo opposto, se esso è negativo. Pertanto è sempre "non negativo" il risultato di un valore assoluto, non il suo argomento.*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & a \leq 0 \end{cases}$$

Es. $|-5| = 5$ $\quad |12| = 12$

Proprietà fondamentali del valore assoluto:

$|a| \geq 0 \quad \forall a$ numero reale $\qquad |a| = 0$ se e solo se $a = 0 \qquad |a| = |-a|$

$|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$

2.4 NUMERI RAZIONALI

I numeri razionali costituiscono un insieme infinito indicato con il simbolo $Q = \left\{ \frac{a}{b} | a, b \in Z; b \neq 0 \right\}$

Tutte le possibili frazioni costituiscono l'insieme dei numeri razionali.
Tutti gli interi possono essere pensati come frazioni con denominatore unitario, o come frazioni il cui numeratore è multiplo del denominatore. Quindi $N \subset Z \subset Q$.

Operazioni tra frazioni

Frazione ridotta ai minimi termini: frazione i cui termini sono primi tra loro.
Per ridurre una frazione ai minimi termini si divide sia il numeratore che il denominatore per il loro MCD.

Es. $\frac{15}{50} \rightarrow$ MCD $= 5 \rightarrow \frac{15:5}{50:5} = \frac{3}{10}$

Addizione / Sottrazione
Occorre che le frazioni abbiano lo stesso denominatore (che corrisponde al mcm dei denominatori).

Es. $\frac{2}{6} + \frac{4}{5} - \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot (5)}{2 \cdot 3 \cdot (5)} + \frac{4 \cdot (2 \cdot 3)}{(2 \cdot 3) \cdot 5} - \frac{5 \cdot (3 \cdot 5)}{2 \cdot (3 \cdot 5)} = -\frac{40}{30} = -\frac{4}{3}$

Moltiplicazione
Frazione avente per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Es. $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

Divisione
Per dividere tra loro due frazioni si moltiplica la prima per il reciproco (o inverso) della seconda, che si ottiene invertendo numeratore e denominatore.

Es. $\frac{1}{3} : \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{3}{5}$

Confronto tra frazioni

È conveniente ridurre le frazioni allo stesso denominatore e poi confrontarne i numeratori.

Es. $\frac{5}{12};\frac{3}{7} \rightarrow$ mcm (12;7) $=84 \rightarrow \frac{5\cdot 7}{12\cdot 7}=\frac{35}{84} \qquad \frac{3\cdot 12}{7\cdot 12}=\frac{36}{84} \quad 36>35 \Rightarrow \frac{5}{12}<\frac{3}{7}$

Da cui il confronto mediante il "prodotto in croce":

$\frac{5}{12};\frac{3}{7} \qquad 5\cdot 7;\ 3\cdot 12 \qquad 35<36$

Numeri decimali e frazioni generatrici

Ogni numero razionale può essere rappresentato anche come numero decimale: è sufficiente dividere il numeratore per il denominatore.

Es. $\frac{13}{4}=3.25$

I numeri decimali possono essere scritti:

- in forma **decimale finita**, cioè con la virgola seguita da un numero finito di cifre, se la frazione che si vuole rappresentare come numero decimale presenta al denominatore un numero formato solo da multipli di 2 o 5.

Es. $\frac{7}{5}=1.4$ NUMERO FINITO

- in forma **decimale infinita e periodica**, se la frazione che si vuole rappresentare come numero decimale presenta al denominatore un fattore che non sia multiplo di 2 o 5.

Es. $\frac{20}{3}=6.\overline{6}$ NUMERO ILLIMITATO PERIODICO

Data una frazione è sempre possibile trovare il corrispondente numero decimale e viceversa.

Se il numero decimale è **finito**:

Es. $1.4=\frac{1.4\cdot 10}{10}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$

Se il numero decimale è **illimitato periodico**:

Es. $6.\overline{6}=\frac{66-6}{9}=\frac{60}{9}=\frac{20}{3} \rightarrow \qquad \dfrac{\textit{tutto il numero} - \textit{antiperiodo}}{\begin{array}{c}\textit{tanti 9 quante le cifre del periodo,}\\ \textit{tanti 0 quante quelle dell'antiperiodo}\end{array}}$

Ma, dati due numeri naturali qualsiasi, a e b, <u>non</u> è sempre possibile trovare un numero naturale uguale alla loro differenza o al loro quoziente. Si amplia perciò l'insieme dei naturali N con l'insieme dei numeri interi relativi Z e con l'insieme dei numeri razionali Q.

(Un ulteriore ampliamento è quello dai numeri razionali ai numeri reali R, insieme infinito e continuo).

3 PROPORZIONI TRA GRANDEZZE OMOGENEE

*Si dicono **omogenee** due grandezze appartenenti allo stesso insieme per le quali è possibile stabilire un criterio di uguaglianza e disuguaglianza. Tra queste grandezze sono definite le operazioni di addizione e di sottrazione, con le consuete proprietà formali.*
*Si dice **proporzione** l'uguaglianza di due rapporti*:

$$a:b=c:d$$

quindi $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$ (con $b,d\neq 0$)

e $$a\cdot d=c\cdot b$$

a e d = *estremi*
b e c = *medi*
a e c = *antecedenti*
b e d = *conseguenti*

3.1 PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI

Proprietà fondamentale $a\cdot d=b\cdot c$

Il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.
Note tre grandezze in proporzione è possibile conoscere il quarto proporzionale.

Se i due medi sono uguali si parla di medio proporzionale $a:b=b:c$

*Caso particolare di medio proporzionale è la **sezione aurea** di un segmento:*
dato un segmento *AB*, si dice sua sezione aurea il segmento *AC*, con *C* compreso tra *A* e *B*, medio proporzionale tra il segmento *AB* e il segmento *CB*. Se *AB* ha lunghezza di misura ℓ, la sua sezione aurea ha come misura la soluzione dell'equazione $x^2=\ell(\ell-x)$.

Proprietà del permutare $a:b=c:d$ $a:c=b:d$ $d:b=c:a$

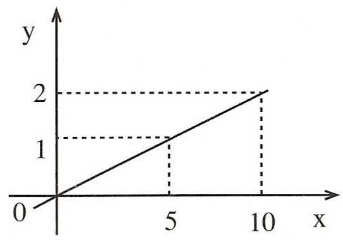
Proprietà del comporre/scomporre $(a\pm b):a=(c\pm d):c$ $(a\pm b):b=(c\pm d):d$

Proprietà dell'invertire $a:b=c:d$ $b:a=d:c$

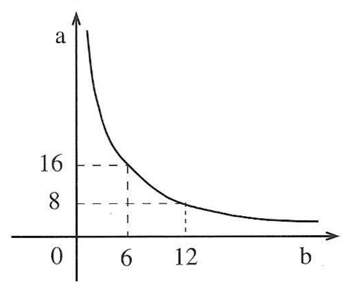
Proprietà invariantiva $(a\cdot n):b=(c\cdot n):d$

3.2 PROPORZIONALITA'

Due variabili *x* e *y* si dicono **direttamente proporzionali** quando il loro rapporto è costante, cioè quando, raddoppiando, dimezzando, triplicando… l'una, raddoppia, dimezza, triplica… anche l'altra. Indicando con K il valore di tale costante, detta *coefficiente di proporzionalità*, scriveremo:
y/x = K oppure *y = Kx*.
Il grafico della funzione che esprime una proporzionalità diretta tra due variabili è una retta passante per l'origine.



Due variabili *x* e *y* si dicono **inversamente proporzionali** quando il loro prodotto è costante, cioè quando raddoppiando, triplicando… l'una, l'altra viene ridotta alla metà, a un terzo…
Indicando con K il valore di tale costante, detta *coefficiente di proporzionalità inversa*, scriveremo:
yx = K oppure *y = K/x*.
Il grafico della funzione che esprime una proporzionalità inversa tra due variabili è un'iperbole equilatera.



4 POTENZE

Si definisce potenza di un numero razionale a *un prodotto di tanti fattori tutti uguali a quel numero quanti ne indica l'esponente.*

In genere la potenza sarà indicata con: a^n, dove a è la base e n l'esponente. L'operazione è detta "elevamento a potenza".

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a ... a}_{n \ volte} \text{ con } a \in Q, n \in N$$

se la base è positiva: la potenza è sempre positiva
se la base è negativa:

- la potenza è positiva, se l'esponente è pari
- la potenza è negativa, se l'esponente è dispari

Es. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$-2^3 = (-2 \cdot -2 \cdot -2) = -8$

4.1 PROPRIETÀ DELLE POTENZE

- $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)} \quad \rightarrow 2^4 \cdot 2^7 = 2^{(4+7)} = 2^{11}$
- $a^m : a^n = a^{(m-n)} \quad \rightarrow 2^4 : 2^7 = 2^{(4-7)} = 2^{-3}$
- $\left(a^m\right)^n = a^{(m \cdot n)} \quad \rightarrow \left(4^2\right)^3 = 4^{(2 \cdot 3)} = 4^6$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \rightarrow 2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$
- $a^n : b^n = (a : b)^n \quad \rightarrow 12^3 : 4^3 = (12 : 4)^3 = 3^3$
- $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \rightarrow 3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$

Attenzione:

$a^1 = a$
$a^0 = 1 \ con \ a \neq 0$
$0^n = 0$
0^0 *non definito*

Attenzione: ***<u>non valgono</u>*** *la proprietà commutativa* $a^b \neq b^a$ Es. $2^3 \neq 3^2$
la proprietà associativa

5 RADICALI

Il radicale algebrico $\sqrt[n]{a}$ *è ogni numero reale la cui potenza n-esima è uguale al numero reale* a *, dove* a *è il radicando e* n *l'indice della radice appartenente ad* N *.*

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Attenzione: condizione d'esistenza del radicale (con n pari) è che $a > 0$

n pari e $a > 0$	Il radicale assume due valori reali opposti	$\sqrt{4} = \pm 2$
n pari e $a < 0$	Il radicale non esiste	
n dispari e $a > 0$	Il radicale assume un valore positivo	$\sqrt[3]{27} = 3$
n dispari e $a < 0$	Il radicale assume un valore negativo	$\sqrt[3]{-8} = -2$

5.1 OPERAZIONI CON I RADICALI

- **Prodotto** $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ Es. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$
- **Quoziente** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ con $b \neq 0$ Es. $\dfrac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{15}{3}} = \sqrt[3]{5}$
- **Potenza** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{\left(a^m\right)} = a^{\frac{m}{n}}$ Es. $\left(\sqrt{8}\right)^3 = \sqrt{(8)^3} = \sqrt{512}$
- **Radice** $\sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a}\right)} = \sqrt[m \cdot n]{a} = a^{\frac{1}{mn}}$ Es. $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

Attenzione: $\sqrt[n]{(a \pm b)} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

È possibile sommare solo ***radicali simili*** *ovvero radicali che hanno uguali il radicando e l'indice della radice. La loro somma algebrica è un radicale, ad essi simile, avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.*

Es. $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

5.2 TRASPORTO DENTRO E FUORI DAL SEGNO DI RADICE

Il fattore da trasportare deve essere positivo: $b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a}$ con $b \geq 0$

$\sqrt[n]{(a)^m \cdot b} = a^{\frac{m}{n}} \cdot \sqrt[n]{b}$ con $a \geq 0$

5.3 RAZIONALIZZAZIONE

È l'insieme delle operazioni che permettono di ottenere un'espressione senza radicali algebrici al denominatore. Ciò è possibile applicando la proprietà invariantiva, sostituendo quindi alla frazione data un'altra frazione ad essa equivalente ottenuta moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso fattore razionalizzante.

	Frazione	Fattore razionalizzante	Operazione	Frazione razionalizzata
1	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\sqrt{a}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$	$\frac{\sqrt{a}}{a}$
2	$\frac{1}{a\sqrt{b}}$	$\sqrt{b}$	$\frac{1}{a\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$	$\frac{\sqrt{b}}{a\cdot b}$
3	$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}}$	$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$
4	$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$ (con $m<n$)	$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}$	$\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$
5	$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$	$\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$	$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$	$\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$
6	$\frac{1}{a\pm\sqrt{b}}$	$a\mp\sqrt{b}$	$\frac{1}{a\pm\sqrt{b}}\cdot\frac{a\mp\sqrt{b}}{a\mp\sqrt{b}}$	$\frac{a\mp\sqrt{b}}{a^2-b}$

Es. $$\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{15}-3}=\frac{1}{\sqrt{15}-3}\cdot\frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{15}+3}=\frac{\sqrt{15}+3}{15-9}=\frac{\sqrt{15}+3}{6}$$

6 LOGARITMI

Si dice logaritmo in base a di b l'esponente da dare ad a per ottenere b (b è "argomento" del logaritmo).

$x=\log_a b$ se e solo se: $a^x=b$

Es. $\log_2 4=2\leftrightarrow 2^2=4$

Condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ b>0 \end{cases}$$

se $a>1$ il log ha andamento crescente, se $o<a<1$ il log ha andamento decrescente

6.1 PROPRIETÀ

- $\log_a(\beta\cdot\gamma)=\log_a|\beta|+\log_a|\gamma|$
- $\log_a\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)=\log_a|\beta|-\log_a|\gamma|$
- $\log_a(\beta^\gamma)=\gamma\cdot\log_a|\beta|$

- $\log_{\beta}\gamma = \log_{\frac{1}{\beta}}\frac{1}{\gamma}$
- $\log_a \beta = \dfrac{\log_{\gamma}\beta}{\log_{\gamma} a}$
- $\log_a \sqrt[n]{\beta} = \log_a \beta^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a \beta$

Attenzione: - $\log_a 1 = 0 \leftrightarrow a^0 = 1$
- $\log_a a = 1 \leftrightarrow a^1 = a$
- *poiché* $\log_a a^n = n\log_a a$ *qualunque numero può essere scritto in notazione logaritmica*

Attenzione: la quinta proprietà è detta anche **teorema del cambio di base** e permette di scrivere qualsiasi logaritmo in una data base come un logaritmo in un'altra base opportuna, e quindi di calcolarlo.

6.2 LOGARITMI DECIMALI E LOGARITMI NATURALI

I logaritmi decimali hanno come base il numero 10 e si indicano con la scrittura:

$Logx$ che equivale a $\log_{10} x$

I *logaritmi naturali* o *Neperiani* hanno come base un numero irrazionale, detto *numero di Nepero (o Eulero)*, indicato con la lettera *e*, il cui valore approssimato è: e = 2,71828…
I logaritmi naturali si indicano con la scrittura:

$\ln x$ che equivale a $\log_e x$

Le tavole dei *logaritmi in base 10* (simbolo Log o $\log_{10}$) e *in base* e (simbolo *ln*) sono memorizzate in qualsiasi calcolatrice scientifica.

7 SISTEMI DI NUMERAZIONE

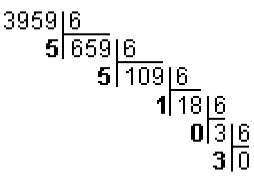
Un numero può essere espresso attraverso diversi sistemi di numerazione a seconda della base scelta.
Il sistema da noi usato normalmente è il sistema decimale posizionale che esprime tutti i numeri come somma di potenze di 10, i numeri sono rappresentati usando tutte e 10 le cifre:

Es. 2401base10 = 2 104 + 4 103 + 0 102 + 1 100

Un altro sistema di numerazione è il sistema binario che esprime il numero come somma di potenze di 2 e i numeri sono rappresentati attraverso solo le cifre 1 e 0:

Es. 10011base2 = 1 24 + 0 23 + 0 22 + 1 21 + 1 20

Per passare da un numero in base 10 a un numero in base n, è necessario dividere il numero per n e ripetere la divisione sul quoziente fino a ottenere 0. Il nuovo numero in base n sarà composto dai resti delle divisioni in ordine.



Ad esempio, per esprimere 3959 (base 10) in base 6, si scrive
$3959_{10} = 30155_6$,

CALCOLO ALGEBRICO

1. MONOMI E POLINOMI

Si chiama ***monomio*** un'espressione algebrica, numerico-letterale, nella quale figurano solo operazioni di moltiplicazione, di divisione e di elevamento a potenza. Un monomio si dice ridotto a forma normale quando è un prodotto di un (solo) fattore numerico, detto coefficiente, e di potenze a basi letterali diverse.
Due monomi si dicono simili quando hanno uguale parte letterale; in tal caso la loro somma è un monomio ad essi simile, avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti. L'esponente di ogni variabile è il grado del monomio relativo a quella variabile, mentre il grado complessivo di un monomio è la somma degli esponenti che in esso compaiono.

Es. $2 \cdot a^3 \cdot b^6$ $\quad$ 2 è il coefficiente numerico
$a^3 \cdot b^6$ è la parte letterale
grado del monomio $= 3 + 6$

Si chiama ***polinomio*** una somma algebrica di monomi. Un polinomio si dice ridotto a forma normale quando i suoi termini sono ridotti a forma normale e fra essi non vi sono monomi simili. Si definisce grado complessivo di un polinomio il massimo grado complessivo dei suoi termini.
La somma algebrica di due o più polinomi è il polinomio ottenuto dalla somma algebrica dei suoi termini.
Il prodotto di due polinomi è il polinomio ottenuto mediante l'applicazione della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma, ovvero il polinomio ottenuto moltiplicando ciascun termine dell'uno per tutti i termini dell'altro.

Proprietà fondamentale: **principio di identità dei polinomi**
Due polinomi in una variabile, entrambi di grado n, che assumono gli stessi valori per $n+1$ valori della variabile, sono identici.

1.1 PRODOTTI NOTEVOLI E SCOMPOSIZIONI IN FATTORI

Prodotto notevole	**Scomposizione**	**Esempio**
$(a+b)(a-b)$	$a^2 - b^2$	$9a^2 - 4b^2 = (3a+2b)\cdot(3a-2b)$
$(a \pm b)^2$	$a^2 + b^2 \pm 2ab$	$(3a+2b)^2 = 9a^2 + 4b^2 + 12ab$
$(a \pm b \pm c)^2$	$a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab \pm 2bc \pm 2ac$	$(3a+2b-c)^2 = 9a^2 + 4b^2 + c^2 + 12ab - 4bc - 6ac$
$(a \pm b)^3$	$a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b + 3ab^2$	$(3a+2b)^3 = 27a^3 + 8b^3 + 54a^2b + 36ab^2$
$(a+b)(a^2+b^2-ab)$	$a^3 + b^3$	$27a^3 + 8b^3 = (3a+2b)(9a^2+4b^2-6ab)$
$(a-b)(a^2+b^2+ab)$	$a^3 - b^3$	$27a^3 - 8b^3 = (3a-2b)(9a^2+4b^2+6ab)$

*Poiché vale l'uguaglianza tra ciascun termine della prima colonna e il corrispondente della seconda, queste uguaglianze possono essere lette sia da sinistra a destra (**prodotto notevole**), sia da destra a sinistra (**scomposizione in fattori**).*

1.2 DIVISIBILITA' DEI POLINOMI

Per ogni coppia di polinomi $A(x)$ e $B(x)$ esistono unici altri due polinomi $Q(x)$ (quoziente) e $R(x)$ (resto) tali che: $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Il polinomio $A(x)$ è quindi divisibile per $B(x)$ se il resto $R(x)$ è nullo.

Es: A(x): $x^3 + 2x^2 + x$ è divisibile per B(x): $x+1$ in quanto -1 è anche radice di A(x).

2. IDENTITÀ ED EQUAZIONI

Siano $A(x)$ e $B(x)$, due espressioni algebriche nella indeterminata x.
L'uguaglianza:

$$A(x) = B(x)$$

si chiama **identità** quando essa è verificata per qualsiasi valore attribuito alla x (esclusi gli eventuali valori per cui le espressioni perdono significato), mentre si chiama **equazione** quando essa è verificata soltanto per particolari valori attribuiti alla x.
I valori che verificano l'equazione (o, come si usa anche dire, che "soddisfano l'equazione") si chiamano **soluzioni** (o radici, o zeri) dell'equazione.

Si chiama **grado** di un'equazione il più alto fra i gradi dei suoi termini.
Es. $4x^6 + 3x^2y^5 - xy + 5x^3$ *è di grado 6*

Per il **teorema fondamentale dell'algebra**: un'equazione di grado n ha sempre n soluzioni, non necessariamente reali, non necessariamente distinte.

Risolvere un'equazione significa trovarne **tutte** le soluzioni. L'indeterminata si chiama *incognita* dell'equazione.

- Principi di equivalenza $\Leftrightarrow$

$A = B$ $A + C = B + C$ *detto anche **principio del trasporto**, perché permette di trasportare termini da una parte all'altra dell'uguale cambiando loro di segno*

$A = B$ $A \cdot C = B \cdot C$ dove $C \neq 0$ (Attenzione!)

Attenzione: una questione essenziale, relativa alla risoluzione delle equazioni, consiste nello stabilire a quale insieme numerico debbano appartenere le soluzioni dell'equazione da risolvere. Ad esempio, se il problema è di natura geometrica e la soluzione è la misura di un segmento, o un perimetro, o un'area, la soluzione andrà cercata nell'insieme dei numeri non negativi, se invece il problema è d'ordine goniometrico, e la soluzione riguarda il possibile valore del seno di un angolo, la soluzione dovrà cadere nell'intervallo [-1,1], …

2.1 EQUAZIONI DI PRIMO GRADO (O LINEARI)

Ridotta a forma normale è del tipo: $ax = b$

SOLUZIONI:

- Se $a \neq 0$ l'equazione è <u>DETERMINATA</u> e la soluzione è $x = \dfrac{b}{a}$
- Se $a = 0$ ma $b \neq 0$ l'equazione è <u>IMPOSSIBILE</u>
- Se $a = 0$ e $b = 0$ l'equazione è <u>INDETERMINATA</u>

2.2 EQUAZIONI DI SECONDO GRADO (O QUADRATICHE)

Ridotta a forma normale è del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ e $a, b, c \in R$

- Se $c = 0$ *diventa* $ax^2 + bx = 0$, *ed è detta* ***spuria***

SOLUZIONI: *esistono sempre due soluzioni reali e distinte* $\rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

- *Se* $b = 0$ *diventa* $ax^2 + c = 0$*, ed è detta* ***pura***

SOLUZIONI**:** *esistono due soluzioni reali e distinte se* $\left(-\frac{c}{a}\right) > 0$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

- *Se* $a, b, c \neq 0$ *diventa* $ax^2 + bx + c = 0$*, ed è detta* ***completa***

SOLUZIONI**:** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ dove $\Delta = b^2 - 4ac$ è detto <u>*discriminante*</u>

se b *è un numero pari* $x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$ *(formula ridotta)*

- Se $\Delta = 0$ le SOLUZIONI sono REALI e COINCIDENTI
- Se $\Delta > 0$ le SOLUZIONI sono REALI e DISTINTE
- Se $\Delta < 0$ le SOLUZIONI NON sono REALI

1. RELAZIONE TRA LE SOLUZIONI E I COEFFICIENTI DI UN'EQUAZIONE DI II GRADO

Data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ si ha che:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

se $\Delta > 0$*, allora l'esistenza di* x_1 *e* x_2 *reali, permette di scomporre il trinomio in fattori, secondo l'uguaglianza*

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Per risolverle è necessario scomporle in fattori (applicando le regole della scomposizione dei polinomi) e ricondursi al caso di equazioni di primo o secondo grado applicando la **legge di annullamento del prodotto.**

2.6 EQUAZIONI BINOMIE

$$ax^n = b$$

- per n dispari $x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$
- per n pari $\longrightarrow$ se $\frac{b}{a} > 0$ si ha $x = \pm\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$

  $\longrightarrow$ se $\frac{b}{a} < 0$ l'equazione è impossibile da risolvere nel campo reale

3. EQUAZIONI TRINOMIE, IN PARTICOLARE BIQUADRATICHE

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

Ponendo $y = x^n$ si ha $ay^2 + by + c = 0$

SOLUZIONI: se $n = 2$ (equazione biquadratica), le 4 soluzioni sono reali se y_1 e y_2 sono ≥ 0:
$x = \pm\sqrt{y_1}$ e $x = \pm\sqrt{y_2}$

2.7 SISTEMI DI EQUAZIONI

Sono insiemi di due o più equazioni che devono essere soddisfatte dagli stessi valori attribuiti alle incognite.
La soluzione di un sistema è ogni soluzione comune a tute le equazioni.
I metodi di risoluzione più usati sono: *sostituzione, riduzione, confronto.*

Es. $\begin{cases} 3x - 2y - 6 = 0 \\ 3x + y - 15 = 0 \end{cases}$ è un sistema di due equazioni lineari a due incognite.

Se per trovare la soluzione comune applico il metodo di <u>*sostituzione*</u>:

- Ricavo y in funzione di x: $\begin{cases} 3x - 2y - 6 = 0 \\ y = -3x + 15 \end{cases}$
- Sostituisco y nella prima equazione: $\begin{cases} 3x - 2(-3x + 15) - 6 = 0 \\ y = -3x + 15 \end{cases}$
- Ricavo x dalla prima equazione: $\begin{cases} 3x + 6x - 30 - 6 = 0 \\ y = -3x + 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} 9x = 36 \\ y = -3x + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -3x + 15 \end{cases}$$

- Sostituisco la x che ho ricavato dalla seconda equazione: $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \cdot 4 + 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Es. $\begin{cases} 3x - 2y - 6 = 0 \\ 3x + y - 15 = 0 \end{cases}$ è un sistema di due equazioni lineari a due incognite.

Se per trovare la soluzione comune applico il metodo del <u>*confronto*</u>:

- Ricavo la stessa incognita da entrambe le equazioni: $\begin{cases} -2y = -3x + 6 \\ y = -3x + 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - 3 \\ y = -3x + 15 \end{cases}$$

- Poiché i primi membri sono uguali, eguaglio anche i secondi membri: $\frac{3}{2}x-3=-3x+15$

$x=4$

- Sostituisco il valore numerico di x in una delle due equazioni: $\begin{cases} x=4 \\ y=-3x+15 \end{cases}$

$\begin{cases} x=4 \\ y=-3\cdot 4+15 \end{cases}$

$\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

Es. $\begin{cases} 4x+3y=16 \\ -5x+6y=-7 \end{cases}$ è un sistema di due equazioni lineari a due incognite.

Se per trovare la soluzione comune applico il metodo della *riduzione*:

- Moltiplico ambo i membri delle due equazioni per opportuni numeri tali da rendere opposti i termini con la stessa incognita.
  Inizio con la y: -2 per $4x+3y=16$
  $+1$ per $-5x+6y=-7$

  $\begin{cases} -8x-6y=-32 \\ -5+6y=-7 \end{cases}$

- Addiziono membro a membro e i termini in y si annullano; ho un'equazione ad una incognita x di cui trovo la soluzione: $-8x-6y=-32$

  $-5x+6y=-7$

  $-13x=-39$

  $x=\frac{-39}{-13}$

  $x=3$

- Sostituisco la x in una delle due equazioni e trovo y: $\begin{cases} x=3 \\ 4x+3y=16 \end{cases}$

$\begin{cases} x=3 \\ 4\cdot 3+3y=16 \end{cases}$

$\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$

3. DISUGUAGLIANZE E DISEQUAZIONI

*Le **disuguaglianze** tra due espressioni* A *e* B *si presentano in uno dei seguenti modi:*
$A \neq B$; $A > B$; $A < B$; $A \geq B$; $A \leq B$

*Quando nella disuguaglianza figurano una o più indeterminate, la disuguaglianza è detta **disequazione**.*

Nell'insieme dei numeri reali è sempre possibile, presi arbitrariamente due elementi diversi, stabilire quali di essi è maggiore dell'altro. Valgono, in R, *le seguenti relazioni:*

- *da* $a > b$, *segue* $a + c > b + c$, *qualunque sia* c
- *da* $a > b$, *con* a *e* b *qualsiasi, segue* $ca > cb$, *se* $c > 0$
  $ca < cb$, *se* $c < 0$
- *da* $a > b$, *con* a *e* b *non negativi, segue* $a^2 > b^2$
- *da* $a > b$, *con* a *e* b *qualsiasi, segue* $a^3 > b^3$
- *da* $a > b$, *con* a *e* b *non nulle e concordi, segue* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- *da* $a^2 > b^2$ *segue* $|a| > |b|$ *per ogni* a *e* b
- *da* $a > b > c$ *segue* $a + d > b + d > c + d$ *per ogni terna di numeri reali* a, b, c

Si chiama disequazione in una variabile un'espressione riconducibile alla forma $f(x) > 0$, $f(x) < 0$

Le disequazioni sono soddisfatte da determinati valori (soluzioni della disequazione) assunti dalle lettere (incognite) che in esse figurano. Risolverle significa determinare l'intero intervallo di tutte le soluzioni possibili.

3.1 PRINCIPI DI EQUIVALENZA

Due disequazioni si dicono *equivalenti* quando ammettono le stesse soluzioni.

3.2 PRINCIPIO DEL TRASPORTO

$$A < B \Leftrightarrow A + C < B + C$$

Es. $2x^2 - 3x - 11 \geq x^2 - 2x - 1$ è equivalente a $x^2 - x - 10 \geq 0$

3.3 PROPRIETÀ INVARIANTIVA DELLA DISUGUAGLIANZA

$$\begin{aligned} A < B \quad &\rightarrow A \cdot C < B \cdot C \text{ se } C > 0 \\ &\rightarrow A \cdot C > B \cdot C \text{ se } C < 0 \end{aligned}$$

N.B. Se si moltiplicano entrambi i membri della disuguaglianza per una espressione negativa, la disuguaglianza cambia verso.

Es. Moltiplicando $-5x^2 + 3x \geq -8$ per -1 risulta $5x^2 - 3x \leq 8$

3.4 DISEQUAZIONI DI I GRADO

$$\begin{array}{l} ax+b<0 \\ ax+b\le 0 \\ ax+b>0 \\ ax+b\ge 0 \end{array}$$

SOLUZIONI:

$$\left.\begin{array}{l} x<-\dfrac{b}{a}; \\ x\le-\dfrac{b}{a}; \\ x>-\dfrac{b}{a}; \\ x\ge-\dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \text{per } \underline{a>0} \qquad \left.\begin{array}{l} x>-\dfrac{b}{a}; \\ x\ge-\dfrac{b}{a}; \\ x<-\dfrac{b}{a}; \\ x\le-\dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \text{per } \underline{a<0}$$

3.5 DISEQUAZIONI DI II GRADO

È utile analizzare il segno del trinomio di secondo grado leggendolo come l'espressione algebrica associata ad una parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate.

$P(x): ax^2+bx+c$

a) $ax^2+bx+c<0$
b) $ax^2+bx+c\le 0$
c) $ax^2+bx+c>0$
d) $ax^2+bx+c\ge 0$
(con $a>0$)

SOLUZIONI:

	$\Delta<0$ Il trinomio ha sempre il segno del suo primo coefficiente a.	$\Delta=0$ Il trinomio ha il segno del suo primo coefficiente a, per ogni $x\ne-\dfrac{b}{2a}$; quando $x=-\dfrac{b}{2a}$ il trinomio si annulla.	$\Delta>0$ Il trinomio ha il segno del suo primo coefficiente a per ogni valore di x esterno all'intervallo degli zeri, mentre ha il segno contrario ad a per ogni valore interno all'intervallo degli zeri, dove per zeri si intendono le due soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione.
$P(x)<0$	impossibile	impossibile	vera per $x_1<x<x_2$
$P(x)\le 0$	impossibile	vera per $x=c$	vera per $x_1\le x\le x_2$
$P(x)>0$	sempre vera	vera per $x\ne c$	vera per $x<x_1$ e $x>x_2$
$P(x)\ge 0$	sempre vera	sempre vera	vera per $x\le x_1$ e $x\ge x_2$

ELEMENTI DI GEOMETRIA PIANA

1. RETTA

*Si dicono **parallele** due rette che non hanno alcun punto in comune.*
*Si dicono **perpendicolari** due rette che si incontrano formando angoli uguali che si dicono retti.*

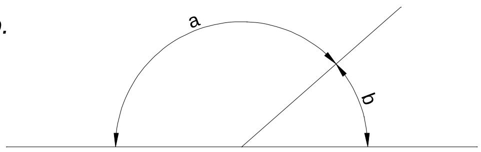
2. SEGMENTO

*Si dice **segmento** una parte di retta delimitata da due punti, detti estremi.*
*Si dicono **consecutivi** due segmenti che hanno un estremo in comune e nessun altro punto.*
*Si dicono **adiacenti** due segmenti consecutivi se appartengono alla stessa retta.*

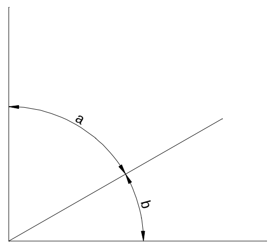
3. ANGOLO

*Si definisce **angolo** ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette uscenti dallo stesso punto.*

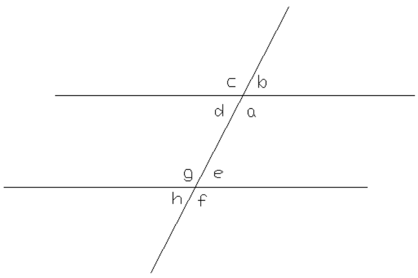
*Due angoli si dicono **supplementari** se la loro unione è un angolo piatto.*



*Due angoli si dicono **complementari** se la loro unione è un angolo retto.*



<u>*Rette parallele tagliate da una trasversale*</u>



*sono **corrispondenti** le coppie:*	*b e*	*c g*	*d h*	*a f*
*sono **coniugati interni** le coppie:*	*a e*	*d g*		
*sono **coniugati esterni** le coppie:*	*b f*	*c h*		
*sono **alterni interni** le coppie:*	*a g*	*d e*		
*sono **alterni esterni** le coppie:*	*b h*	*f c*		

*Le coppie di angoli **alterni** e i **corrispondenti** sono congruenti, mentre le coppie di **coniugati** sono **supplementari**.*

GEOMETRIA EUCLIDEA

1. POLIGONI

*Si dice **convessa** una figura in cui, presi comunque due punti interni, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nella figura stessa..*
*Si dice **concava** una figura in cui esistono due punti interni tali che il segmento che li congiunge non è interamente contenuto nella figura stessa.*

*Si dice **poligono** una figura parte di piano delimitata da una linea spezzata chiusa. I segmenti che compongono la spezzata chiusa si dicono **lati** del poligono.*

2. TRIANGOLI

Si dice triangolo **scaleno** un triangolo con tre lati e tre angoli diversi tra loro.
Si dice triangolo **isoscele** un triangolo con due lati e due angoli uguali.
Si dice triangolo **equilatero** un triangolo con tre lati e tre angoli uguali.
Si dice triangolo **rettangolo** un triangolo con un angolo di 90°.

2.1 CRITERI DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI

- *Due triangoli sono congruenti tra loro se hanno congruenti due lati e l'angolo compreso.*
- *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due angoli e il lato ad essi comune.*
- *Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due angoli e il lato opposto a uno di essi.*
- *Due triangoli sono congruenti se hanno i tre lati rispettivamente congruenti.*

2.2 CRITERIO GENERALE DI UGUAGLIANZA TRA DUE TRIANGOLI RETTANGOLI

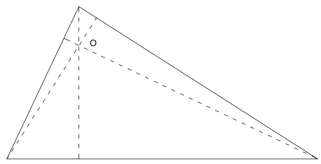
Se due triangoli rettangoli hanno ordinatamente uguali due elementi (che non siano i due angoli acuti), allora essi sono uguali.

2.3 TEOREMA DEL TRIANGOLO ISOSCELE

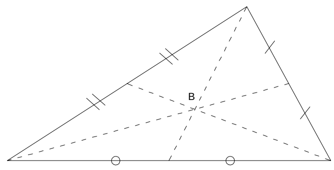
In un triangolo isoscele l'altezza, la mediana, e la bisettrice relative alla base coincidono.

2.4 PUNTI NOTEVOLI DI UN TRIANGOLO

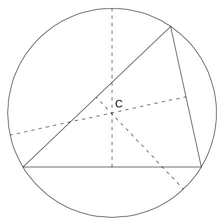
*L'**ortocentro** è il punto d'intersezione delle altezze, esso può essere interno o esterno al triangolo, oppure coincidente con uno dei suoi vertici.*



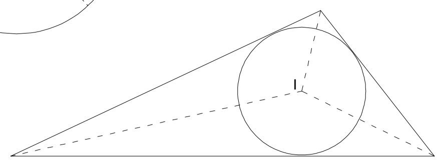
*Il **baricentro** è il punto d'intersezione delle mediane, esso è sempre interno al triangolo.*



*Il **circocentro** è il punto di intersezione degli assi dei lati del triangolo, esso è anche il centro della circonferenza circoscritta al triangolo e può essere interno al triangolo, esterno o coincidente con uno dei suoi vertici.*



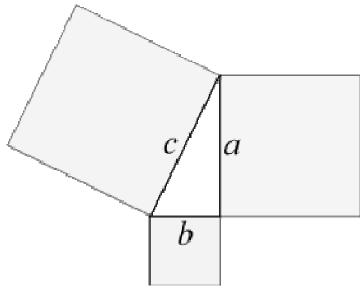
*L'**incentro** è il punto d'intersezione delle bisettrici degli angoli del triangolo, esso è anche il centro della circonferenza inscritta nel triangolo, ed è sempre interno al triangolo.*



2.5 PERIMETRO E AREA

*Il **perimetro** di un triangolo è dato dalla somma dei suoi tre lati.*
*L'**area** del triangolo è data dal semiprodotto di base ed altezza del triangolo.*

2.6 TEOREMA DI PITAGORA

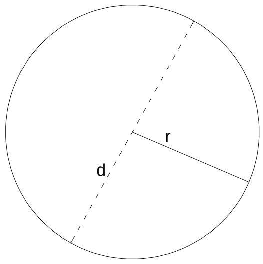


In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull' ipotenusa è pari alla somma dell'area dei quadrati costruiti sui cateti.

3. CIRCONFERENZA E CERCHIO

La **circonferenza** è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto *centro*.
Il **cerchio** è quella porzione di piano delimitata da una circonferenza.

$$d = 2r$$
$$P = 2\pi r$$
$$A = \pi r^2$$

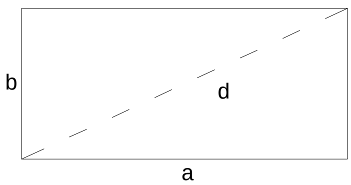


Angoli alla circonferenza

- *Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti sono congruenti.*
- *Angoli alla circonferenza che insistono su una semicirconferenza sono retti.*

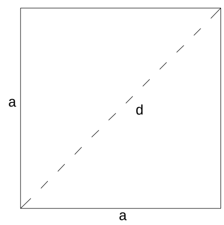
4. POLIGONI

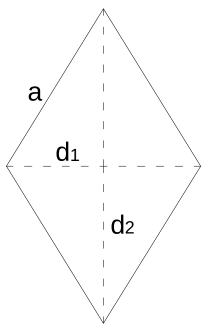
Un poligono è una figura geometrica piana costituita da una linea spezzata chiusa. Un poligono regolare ha tutti i lati e tutti gli angoli uguali, ed è inscrivibile e circoscrivibile in/ad una circonferenza. Queste due circonferenze hanno lo stesso centro che viene definito ***centro del poligono****.* Un quadrilatero è un poligono costituito da quattro lati: è detto trapezio se due lati opposti sono paralleli, parallelogramma se sono paralleli due a due, rombo se è un parallelogramma con i lati uguali, rettangolo se tutti gli angoli sono retti, quadrato se è un rettangolo con i lati tutti uguali.



- **Rettangolo***:* $P = 2(a+b)$
  $A = a \cdot b$
  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

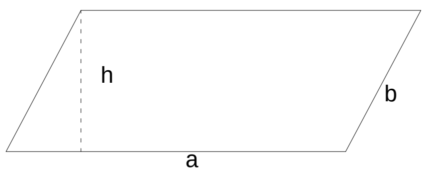
- **Quadrato:** $P = 4 \cdot a$
  $A = a^2$
  $d = a \cdot \sqrt{2}$

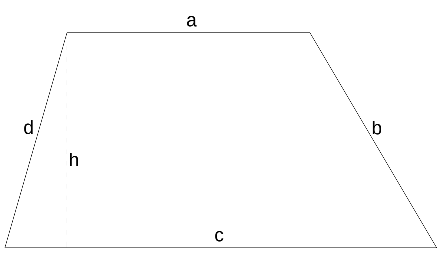




- **Rombo:** $P = 4a$
  $A = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$

- **Parallelogrammo:** $P = 2 \cdot (a+b)$
  $A = a \cdot h$





- **Trapezio:** $P = a + b + c + d$
  $A = (a+c) \cdot \dfrac{h}{2}$

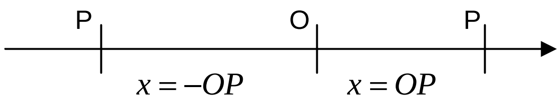
GEOMETRIA ANALITICA

1. COORDINATE SULLA RETTA

1.1 ASCISSA DI UN PUNTO

Definiamo ascissa di un punto P, su una retta orientata, sulla quale sia fissato un punto O come origine, la misura del segmento OP, rispetto ad un'unità di misura (u) precedentemente fissata.

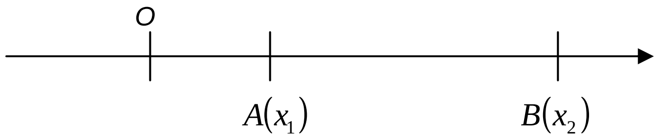
$x = \frac{OP}{u}$ oppure $x = -\frac{OP}{u}$ a seconda che x sia a destra o a sinistra di O.



1.2 DISTANZA TRA DUE PUNTI

La distanza orientata tra due punti di una retta, sulla quale è fissato un sistema di ascisse, è uguale alla differenza tra l'ascissa del secondo punto e quella del primo.

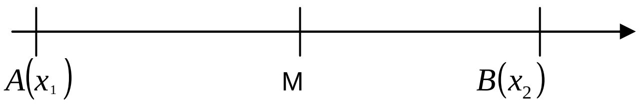
$\overline{AB} = x_2 - x_1$



1.3 PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

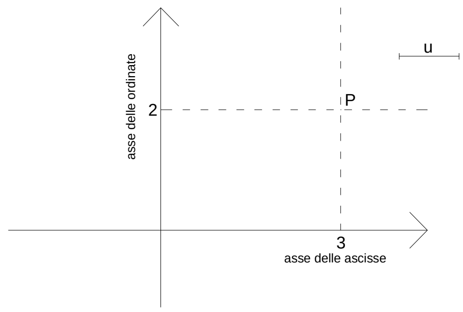
L'ascissa del punto medio di un segmento è uguale alla semisomma delle ascisse degli estremi del segmento stesso.

$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$



2. COORDINATE DEL PIANO

2.1 COORDINATE DI UN PUNTO NEL PIANO

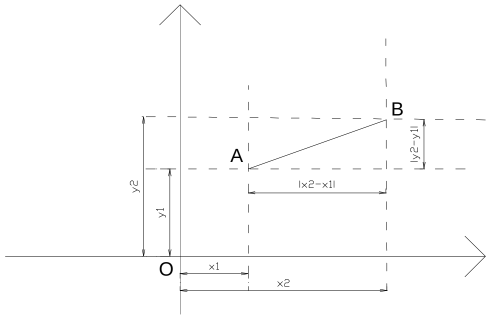


Fissati nel piano due assi mutuamente ortogonali, detti assi cartesiani, intersecantisi in O (*origine*), e scelti come unità di misura due segmenti sovrapponibili per i due assi, è sempre possibile stabilire una corrispondenza biunivoca e completa tra i punti P del piano e le coppie ordinate x (*ascissa*) e y (*ordinata*) di due numeri reali.
Si dice *ascissa di* P la misura del segmento che esprime la distanza di P dall'asse delle ordinate; definiamo *ordinata di* P la misura del segmento che esprime la distanza di P dall'asse delle ascisse.

2.2 DISTANZA TRA DUE PUNTI

La distanza assoluta tra due punti in un piano, nel quale è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze tra le coordinate omonime dei due punti stessi.

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

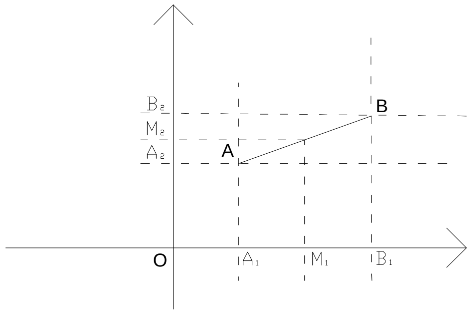


2.3 PUNTO MEDIO

Le coordinate del punto medio di un segmento sono uguali alle semisomme delle coordinate omologhe degli estremi del segmento stesso.

$$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$y_M=\frac{y_1+y_2}{2}$$



3. FUNZIONI

3.1 CONCETTO DI FUNZIONE

Due quantità variabili, che chiameremo genericamente x e y, sono l'una univocamente dipendente dall'altra, quando ad ogni valore assegnato alla prima corrisponde uno ed un solo valore della seconda. La legge che permette di passare da ogni $x\in X$ al corrispondente valore $y\in Y$ si dice anche *funzione* e si scrive:

$y=f\left(x\right)$ (si legge "y è funzione di x")

3.2 CAMPO DI ESISTENZA O DOMINIO DI UNA FUNZIONE

Il *campo di esistenza* (C.E.) o *dominio* della funzione è l'insieme X dei valori reali che si possono attribuire alla variabile x, detta *variabile indipendente*, affinché esista il corrispondente valore reale delle y.

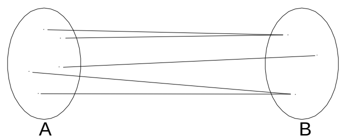
Es. $y=\frac{3}{2}x+5$ C.E. è l'insieme R

$y=\frac{4}{x-7}-8x^2$ C.E. è l'insieme R privato dei valori che annullano il denominatore della frazione ($x-7$)

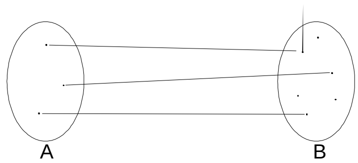
$y=\sqrt[n]{x}$ C.E. è l'insieme dei valori reali per i quali $x\geq 0$

3.3 TIPI DI FUNZIONI

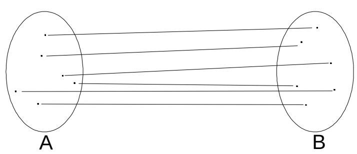
Suriettiva: ogni elemento b di B ha almeno una contro immagine a in A



Iniettiva: se ad elementi diversi dell'insieme A corrispondono immagini diverse in B



Biunivoca o biettiva: ogni elemento di B è immagine di un solo elemento di A e viceversa



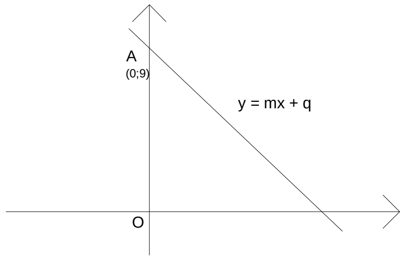
4. LA RETTA

La retta è una funzione di primo grado.

a. Definizione

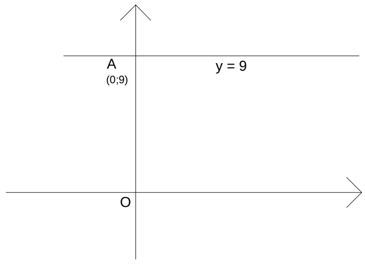
La retta è il luogo geometrico dei punti del piano le cui coordinate soddisfano un'equazione lineare in x e y dalla forma:
$ax+by+c=0$ (*equazione implicita* della retta). Se $b \neq 0$ ricaviamo *l'equazione esplicita* $y=mx+q$, dove

m è il *coefficiente angolare*, ed indica l'inclinazione della retta rispetto all'asse delle x;
q è il *termine noto*, e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y.



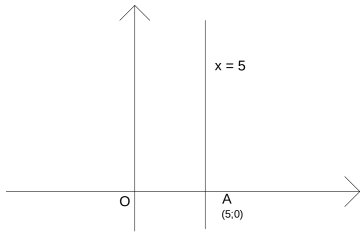
b. Retta parallela all'asse delle x

È il luogo di punti aventi tutti la medesima ordinata:
$y=K$
Es. $y=5$



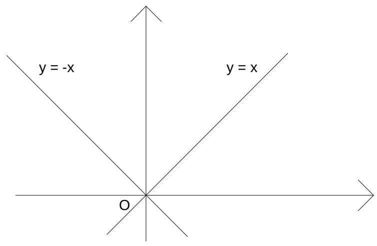
c. Retta parallela all'asse delle y

È il luogo dei punti aventi tutti la stessa ascissa:
$x=K$
Es. $x=5$



d. Retta passante per l'origine degli assi

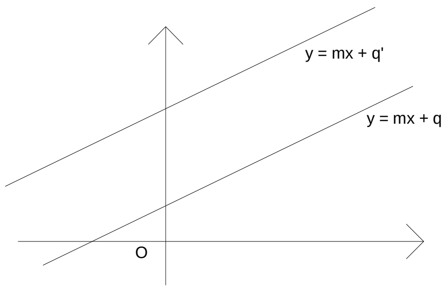
È il luogo dei punti del piano per i quali è costante il rapporto tra ordinata e ascissa. Indicando con m tale rapporto, e con x e y le coordinate di un generico punto r, dovrà essere: $y=mx$



La retta bisettrice del primo e terzo quadrante ha equazione $y=x$, mentre la bisettrice del secondo e quarto, ad essa perpendicolare, ha equazione $y=-x$.

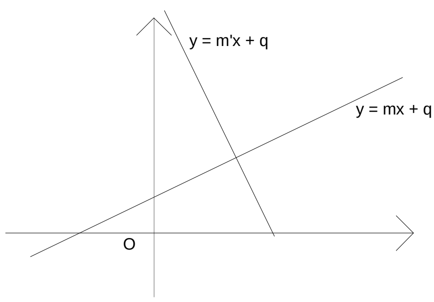
e. Condizione di parallelismo tra rette

Condizione necessaria e sufficiente perché due rette siano parallele è che abbiano lo stesso coefficiente angolare.
Cioè $y=m_1x$ e $y=m_2x$ sono uguali se e solo se $m_1=m_2$.



f. Condizione di perpendicolarità tra rette

Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette siano tra loro perpendicolari è che i loro coefficienti angolari siano antireciproci, e cioè che il coefficiente angolare dell'una sia uguale all'opposto del reciproco di quello dell'altra.



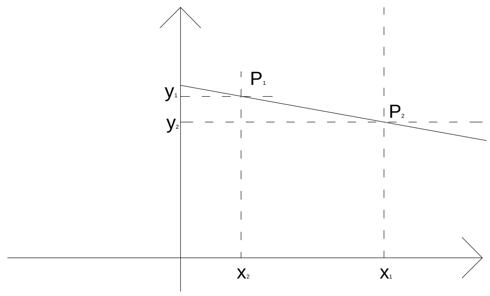
Cioè $y = m_1 x$ e $y = m_2 x$ sono perpendicolari se e solo se $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, e dunque $m_1 \cdot m_2 = -1$.

g. Equazione della retta passante per un punto e di dato coefficiente angolare

Dato un generico punto P di coordinate $(x_1; x_2)$, l'equazione della retta passante per tale punto è $y - y_1 = m(x - x_1)$.

h. Equazione di una retta passante per due punti dati

Dati due punti $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$ non giacenti su una retta parallela all'asse y, l'equazione della retta che passa per essi è $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.



i. Coordinate del punto d'intersezione tra due rette

Ricercare il punto d'intersezione di due rette, di equazioni rispettivamente $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, significa trovare il punto le cui coordinate soddisfano entrambe le equazioni. La determinazione di tali coordinate verrà quindi effettuata mediante la risoluzione del sistema: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$.

5. LA CIRCONFERENZA

La circonferenza non è una funzione.

j. Definizione

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto *centro*.
Dato un punto di coordinate (a,b) e una distanza r, l'equazione della circonferenza di centro (a,b) e raggio r è:
$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$

All'equazione più generale si dà spesso la forma canonica:

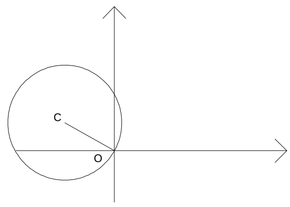
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, dove, se la circonferenza ha

centro $C(\alpha; \beta)$, $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$ e $\mathrm{c} = \alpha^2 + \beta^2 - \mathrm{r}^2$.

Data l'equazione generale di una circonferenza, le coordinate del suo **centro** sono: $\begin{cases} x = -\frac{\alpha}{2} \\ y = -\frac{\beta}{2} \end{cases}$.

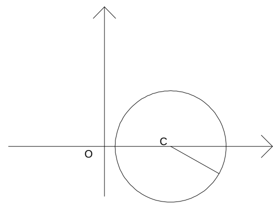
k. Circonferenze con equazione incompleta: $c = 0$

La sua equazione è del tipo: $x^2 + y^2 + ax + by = 0$.
La circonferenza passa per l'origine degli assi.



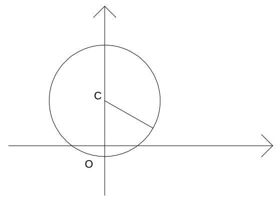
l. Circonferenze con equazione incompleta: $b = 0$

La sua equazione è del tipo: $x^2 + y^2 + ax + c = 0$.
Il centro della circonferenza appartiene all'asse x.



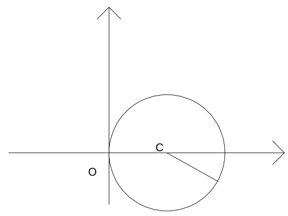
m. Circonferenze con equazione incompleta: $a = 0$

La sua equazione è del tipo: $x^2 + y^2 + by + c = 0$.
Il centro della circonferenza appartiene all'asse y.



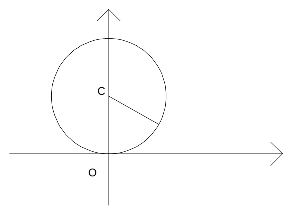
n. Circonferenze con equazione incompleta: $b = c = 0$

La sua equazione è del tipo: $x^2 + y^2 + ax = 0$.
La circonferenza passa per l'origine degli assi ed il suo centro appartiene all'asse x.



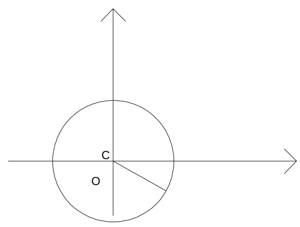
o. Circonferenze con equazione incompleta: $a = c = 0$

La sua equazione è del tipo: $x^2 + y^2 + by = 0$.
La circonferenza passa per l'origine degli assi ed il suo centro appartiene all'asse y.



p. Circonferenze con equazione incompleta: $a = b = 0$

La sua equazione è del tipo: $x^2 + y^2 + c = 0$.
Il centro della circonferenza coincide con l'origine degli assi.

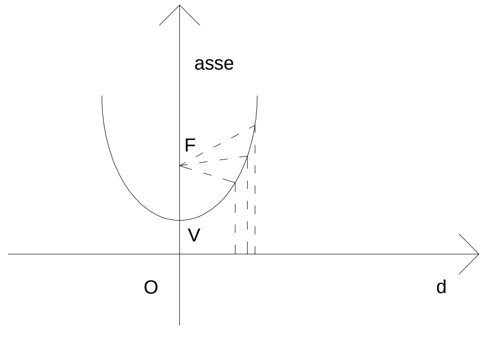


6. LA PARABOLA

q. Definizione

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da una retta fissa d (*direttrice*) e da un punto fisso P (*fuoco*).

L'**equazione generale** di una parabola avente l'asse di simmetria parallelo ad uno dei due assi di riferimento cartesiani è $y = ax^2 + bx + c$ (in questo caso il suo asse è parallelo all'asse delle y). Data questa equazione, le



coordinate del **fuoco** saranno $F\left(-\frac{b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)$ e l'equazione della **direttrice**: $y=-\frac{1+\Delta}{4a}$

Inoltre l'**asse** della parabola (se parallelo all'asse delle ordinate) ha equazione $x=-\frac{b}{2a}$;

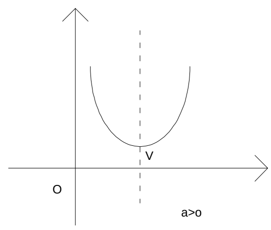
e il **vertice** ha coordinate $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

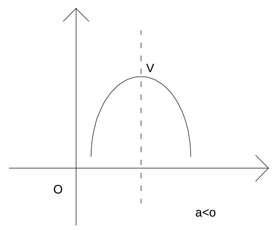
La parabola con asse di simmetria verticale è una funzione di secondo grado.

Analogamente, un'equazione del tipo $x=ay^2+by+c$ rappresenta una parabola il cui asse di simmetria è parallelo all'**asse** delle x ed ha equazione $y=-\frac{b}{2a}$, il **vertice** nel punto $V\left(-\frac{\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$, il **fuoco** nel punto $F\left(\frac{1-\Delta}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$, e la **direttrice** di equazione $x=-\frac{1+\Delta}{4a}$.

Se $a>0$ la parabola presenta la concavità verso l'alto.

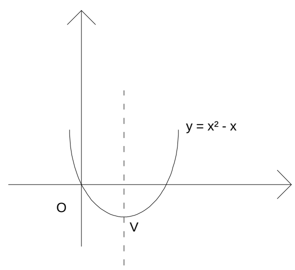
Se $a<0$ la parabola presenta la concavità verso il basso.



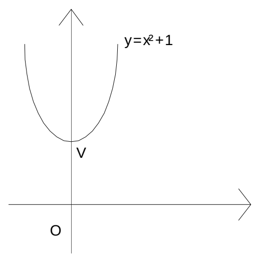


r. Casi notevoli

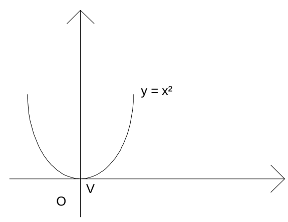
$y=ax^2+bx$. Se $c=0$ la parabola passa per l'origine. Se a e b sono concordi, l'ulteriore punto d'intersezione della parabola con l'asse x ha ascissa negativa; viceversa ha ascissa positiva.



$y=ax^2+c$. Se $b=0$ allora l'ordinata del vertice coincide con il valore di c. L'asse della parabola coincide, dunque, con l'asse delle ordinate; l'asse delle ascisse interseca la parabola in due punti se a e c sono discordi, in nessun punto se sono concordi.

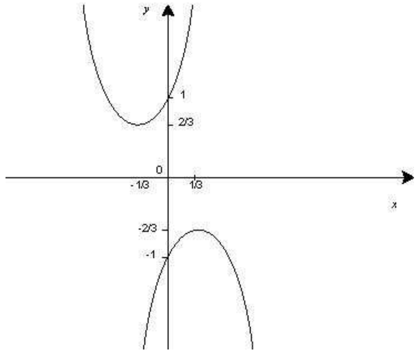


$y=ax^2$. Se $b=0$ e $c=0$ allora il vertice della parabola coincide con l'origine degli assi.



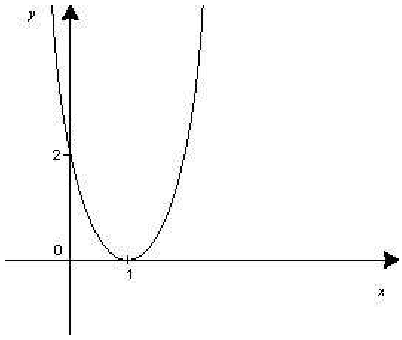
Es.

$\Delta < 0$



- $3x^2 + 2x + 1 < 0 \qquad \Delta = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8$

  In questo esempio $a = +3$, quindi il trinomio
  è sempre > 0 e perciò non concorda
  con il verso della disequazione.
  Non esistono dunque soluzioni.



- $-3x^2 + 2x - 1 < 0 \qquad \Delta = 4 - 4 \cdot (-3)(-1) = -8$

  In questo esempio $a = -3$, quindi il trinomio
  è sempre < 0 e perciò concorda
  con il verso della disequazione
  che è sempre verificata.

$\Delta = 0$

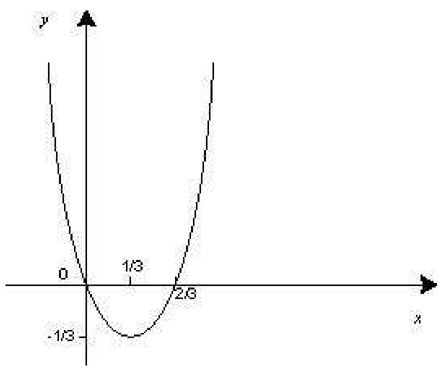
- $2x^2 - 4x + 2 < 0$

  $\Delta = 0$

  In questo esempio la disequazione
  non è mai verificata perché
  il trinomio è sempre ≥ 0.

  ATTENZIONE: se la disequazione è scritta $2x^2 - 4x + 2 \leq 0$,
  è verificata per $x = -\dfrac{b}{2a}$.

$\Delta > 0$



- $3x^2 - 2x > 0$

  $\Delta = 4$

  Trovo gli zeri dell'equazione $\rightarrow 3x^2 - 2x = 0$ per $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{2}{3}$

  La disequazione è verificata per $x < 0$; $x > \dfrac{2}{3}$,

  perché in questi intervalli il trinomio è positivo.

7. L’ELLISSE E L’IPERBOLE

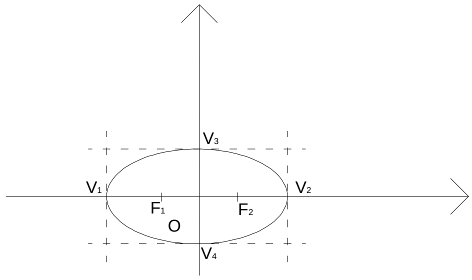
s. ellisse

Si dice ellisse il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti *fuochi*.

L’equazione canonica (o normale) dell’ellisse, cioè quella riferita a due assi di riferimento che corrispondono ai suoi assi di simmetria, è la seguente: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dove $c^2=a^2-b^2$.

I punti in cui l’ellisse interseca gli assi di riferimento, detti *vertici*, sono $V_1(-a;0)$, $V_2(a;0)$, $V_3(0;b)$, $V_4(0;-b)$.

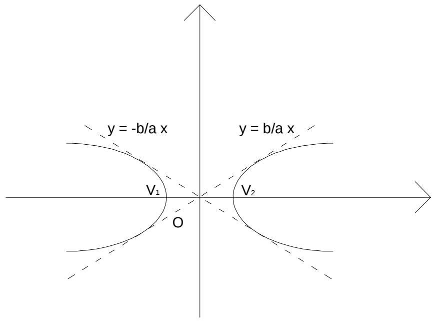
Le coordinate dei *fuochi* sono $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.



t. iperbole

L’iperbole è il luogo dei punti del piano per i quali è costante, e diversa da zero, il valore assoluto della differenza delle distanze da due punti fissi detti *fuochi* (F_1 e F_2).

L’equazione dell’iperbole rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale i cui assi x e y siano rispettivamente la retta dei fuochi e la retta ad essa perpendicolare nel punto medio del segmento F_1F_2 è la seguente: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dove $c^2=a^2+b^2$.



L’iperbole interseca l’asse delle x in due punti, chiamati *vertici reali* dell’iperbole, le cui coordinate sono $V_1(-a;0)$ e $V_2(a;0)$. Gli *asintoti* hanno rispettivamente equazioni $y=\frac{b}{a}x$ e $y=-\frac{b}{a}x$.

Le coordinate dei *fuochi* sono $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

L’eccentricità è definita $e=\frac{c}{a}$ $\quad 0<e<1$

La funzione omografica è un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi cartesiani

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ dove $a,b,c,d\in R$.

Centro: $\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)$ $\qquad$ asintoti: $x=-\frac{d}{c}$ $\qquad y=\frac{a}{c}$

8. ESPONENZIALI E LOGARITMI

u. esponenziali

Se a è un numero positivo diverso da 1 ed x una variabile reale, posto $y = a^x$ si ottiene una funzione detta *esponenziale*.

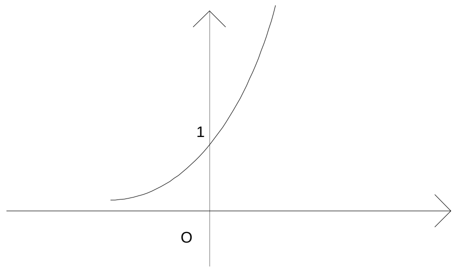


Grafico della funzione $y = 2^x$

Questa funzione assume valori positivi per qualunque valore attribuito all'esponente e non si annulla mai; passa sempre per il punto $P(0;1)$; per $a > 1$ la funzione è crescente, mentre per $0 < a < 1$ la funzione è decrescente.

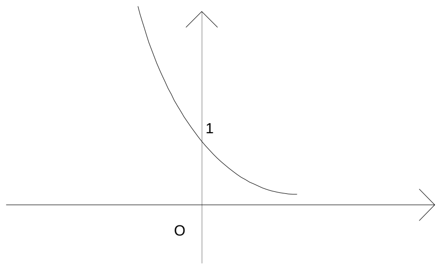


Grafico della funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

v. logaritmi

Se a è un numero positivo diverso da 1 l'espressione $\log_a x$ (con $x > 0$) varia al variare di x; posto $y = \log_a x$ si ottiene una funzione che viene detta *logaritmica*.

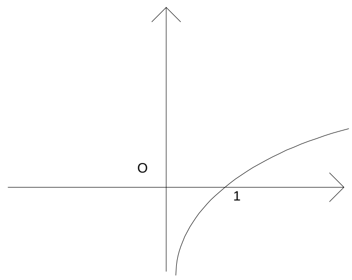


Grafico della funzione $y = \log_2 x$

Per $a > 1$ la funzione logaritmica è:**crescente**
positiva per $x > 1$
negativa per $0 < x < 1$;

Per $0 < a < 1$ la funzione è:
decrescente
positiva per $0 < x < 1$
negativa per $x > 1$.

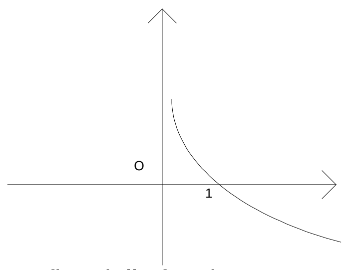
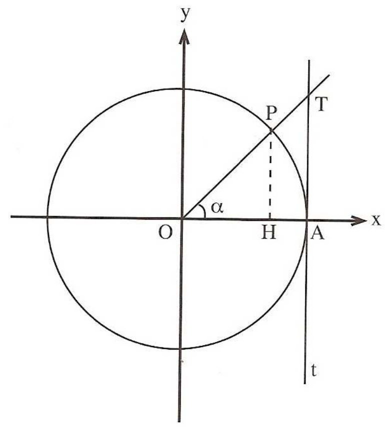


Grafico della funzione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

- TRIGONOMETRIA

9. FUNZIONI TRIGONOMETRICHE: GRAFICI PRINCIPALI

Dato un angolo qualsiasi $A\hat{O}P = \alpha$, le funzioni trigonometriche di α sono: il seno ($sen\alpha$), il coseno ($\cos\alpha$) e la tangente ($tg\alpha$).
Con riferimento alla figura, esse sono definite nel modo seguente:



$$sen\alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \frac{y_p}{R}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = \frac{x_p}{R}$$

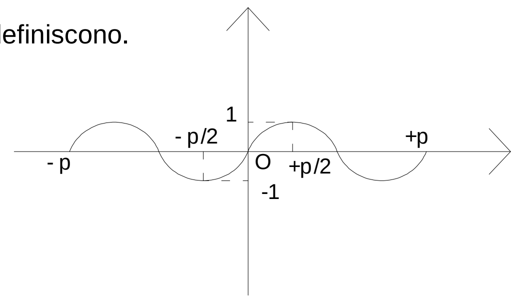
$$tg\alpha = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{y_r}{R}$$

Dalla figura si deduce anche che le funzioni $sen\alpha$ e $\cos\alpha$ sono periodiche di periodo 2π mentre $tg\alpha$ è periodica di periodo π.

$$sen(\alpha + 2K\pi) = sen\alpha$$
$$\cos(\alpha + 2K\pi) = \cos\alpha \qquad \text{dove } K \text{ è un numero intero}$$
$$tg(\alpha + K\pi) = tg\alpha$$

Sen, $\cos$ e tg sono indipendenti dalle dimensioni degli elementi che le definiscono.
La sinusoide e la cosinusoide mostrano che $|sen\alpha| < 1$, $|\cos\alpha| < 1$.

La tangentoide mostra che per $\alpha = (2K+1)\frac{\pi}{2}$ la tangente non esiste.



w. logaritmi

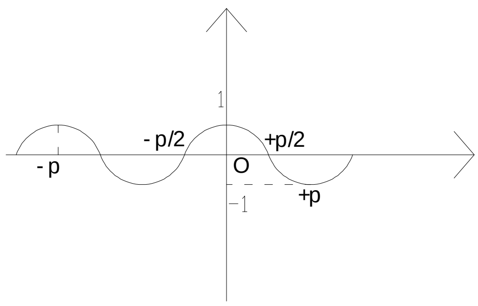
Diagramma della funzione $y = sen\alpha$ (*sinusoide*).

Ha massimo in $y = 1$ e minimo in $y = -1$, passa per l'origine degli assi cartesiani di riferimento, interseca l'asse delle x nei punti di ascissa $\pi + K\pi$ (dove K è un numero intero); ha periodo 2π.

x. coseno

Diagramma della funzione $y = \cos\alpha$ (*cosinusoide*).

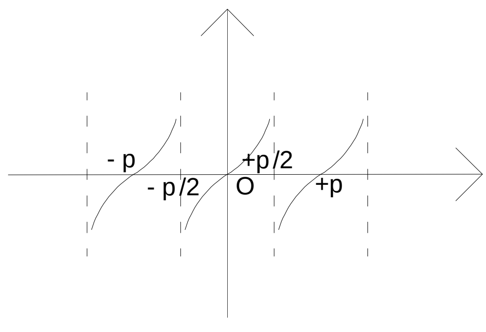
Ha massimo in $y = 1$, minimo in $y = -1$, interseca l'asse delle x nei punti di ascissa $\frac{\pi}{2} + K\pi$ (dove K è un numero intero); ha periodo 2π.



y. tangente

Diagramma della funzione $y = tg\alpha$ (*tangentoide*).

Passa per l'origine degli assi cartesiani di riferimento, interseca l'asse delle x nei punti di ascissa $\pi + K\pi$; i suoi asintoti verticali hanno



equazione $x = \frac{\pi}{2} + K\pi$ (in entrambi i casi K è un numero intero); ha periodo π.

1. SENI, COSENI, TANGENTI DI ANGOLI NOTI

Tra i possibili sistemi di misura degli angoli e degli archi, quelli più usati sono il **sessagesimale**, che utilizza come unità il grado (novantesima parte dell'angolo retto), e quello in **radianti**, la cui unità di misura è il radiante (secondo tale sistema l'angolo al centro in una circonferenza è dato dal rapporto tra l'arco sotteso ed il raggio).
Le misure di uno stesso angolo nei due sistemi sono collegate dalla relazione di conversione:

$$\alpha^\circ : \alpha^r = 180^\circ : \pi$$

2. RELAZIONI TRA LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE DI UNO STESSO ANGOLO

Dall'applicazione del teorema di Pitagora: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ $\quad tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$

Angoli complementari: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Angoli supplementari: $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\quad \cos(\pi - x) = -\cos x$

$\pi + x$: $\quad \sin(\pi + x) = -\sin x$ $\quad \cos(\pi + x) = -\cos x$

3. FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Esprimono le funzioni trigonometriche della somma degli angoli mediante le funzioni trigonometriche di α e β.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$$

in particolare:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

4. FORMULE DI BISEZIONE

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)}{2}}$$
$$tg\,\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)}$$

5. FORMULE PARAMETRICHE

In caso di equazioni in cui siano presenti contemporaneamente sen, $\cos$ e tg, queste andranno risolte sostituendo a tali valori le seguenti formule parametriche:

$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ $tg\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$ (con $t=tg\frac{\alpha}{2}$)

In questo modo si otterrà un'equazione con una sola incognita t. Basterà quindi trovare il valore di t per cui l'equazione risulti risolta e calcolare poi il valore dell'angolo α.

6. FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\sin p\pm\sin q=2\sin\left(\frac{p\pm q}{2}\right)\cos\left(\frac{p\mp q}{2}\right)$$
$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

7. RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI

Detti A, B, C i lati di un triangolo generico e α, β, γ gli angoli opposti a ognuno di essi, si può scrivere:

7.1 RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO (C = ipotenusa):

$$B=C\ sen\beta$$
$$B=A\ tg\beta$$

7.2 RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO QUALSIASI:

Teorema del coseno: $A^2=B^2+C^2-2BC\ \cos\alpha$

Teorema dei seni: $\frac{A}{sen\alpha}=\frac{B}{sen\beta}=\frac{C}{sen\gamma}$

7.3 AREA DI UN TRIANGOLO:

- Noti due lati, ad esempio B e C, e l'angolo compreso α:

$S = \frac{1}{2} \cdot B \cdot C \cdot sen\alpha$ S = superficie

- Area di un triangolo isoscele essendo noti L (uno dei due lati uguali) e l'angolo al vertice α:

$$S = L^2 \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

8. EQUAZIONI E DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

8.1 EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE ELEMENTARI

Tali equazioni si risolvono ricorrendo alla circonferenza trigonometrica (con centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio uguale a 1) o al diagramma della funzione che compare al primo membro.

Es. $senx = \frac{1}{2}$ è verificata per $x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$ e $x = \frac{5}{6}\pi + 2K\pi$

8.2 EQUAZIONE IN CUI COMPARE SOLO UNA FUNZIONE TRIGONOMETRICA

Con passaggi algebrici si perviene ad un'equazione elementare le cui soluzioni sono quelle descritte sopra.

Es. $4senx + 2(1 - 2sen^2 x) = 3$

$$4(senx)^2 - 4senx + 1 = 0$$

$$(2senx - 1)^2 = 0$$

$$senx = +\frac{1}{2}$$

8.3 EQUAZIONE IN CUI COMPAIONO PIÙ FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Si sfruttano le relazioni tra le funzioni trigonometriche trovate in precedenza al fine di pervenire ad una variabile per la cui soluzione si segue il metodo descritto prima.

Es. $senx + 2(\cos x)^2 - 1 = 0$

$$senx + 2\left[1 - (senx)^2\right] - 1 = 0$$

$$2sen^2 x + senx + 1 = 0$$

8.4 EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE

Sono equazioni nella forma: $a \cdot sen[f(x)] + b \cdot \cos[f(x)] = 0$.

Tali equazioni si risolvono dividendo ambo i membri per $\cos[f(x)]$, una volta discussi i valori per cui esso si annulla.

Es. $senx - \cos x = 0$

$$tgx - 1 = 0$$

$$tgx = 1$$

8.5 EQUAZIONI LINEARI NON OMOGENEE

Sono equazioni nella forma: $a \cdot sen[f(x)] + b \cdot \cos[f(x)] + c = 0$ con $c \neq 0$

Tali equazioni si possono risolvere utilizzando diversi metodi:

- si può esprimere una delle due funzioni per mezzo dell'altra e, se si ha un fattore sotto radice, si elevano entrambi i membri al quadrato al fine di rendere razionale l'equazione. Alla fine però è necessario eseguire la verifica delle soluzioni per scartare quelle estranee all'equazione di partenza.
- Tenendo conto che $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ si può ricorrere al sistema equivalente:
  $$\begin{cases} a \cdot sen[f(x)] + b \cdot \cos[f(x)] + c = 0 \\ sen^2[f(x)] + \cos^2[f(x)] = 1 \end{cases}$$
- Si possono esprimere il sen e il $\cos$ di $f(x)$ in forma parametrica come funzioni razionali di $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$
- Si può dividere tutto per $\sqrt{a^2+b^2}$ e porre $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$ e $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$ per poi applicare la formula di addizione del seno al contrario ed ottenere la seguente equazione:
  $\sin(f(x)+\alpha) + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0$ che è un'equazione trigonometrica elementare.

8.6 DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Molte disequazioni trigonometriche si possono risolvere per via grafica, cioè analizzando o i grafici delle funzioni trigonometriche, o il cerchio goniometrico.

Es. $senx > \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$

- STATISTICA E CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

1. IL CALCOLO COMBINATORIO

Serve a determinare il numero dei diversi tipi di raggruppamenti (a gruppi di *k* elementi) che si possono formare con *n* elementi.

1.1 DISPOSIZIONI SEMPLICI

Con disposizioni di *n* oggetti a *k* a *k* ($D_{n,k}$) si definisce numero di modi in cui è possibile disporre *n* oggetti presi *k* alla volta (a *k* a *k*), ove ciascuna disposizione differisce dalle altre **o per gli oggetti o per il loro ordine**.

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Es. $D_{5,3}$ (disposizione di 5 oggetti a 3 a 3): $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Es. $D_{9,7} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 181.440$

Es. In quanti modi 30 alunni si possono disporre in banchi da 2 posti ciascuno? $D_{30,2} = 30 \cdot 29 = 870$

1.2 PERMUTAZIONI

Le permutazioni di n elementi distinti sono tutti i gruppi di n elementi che si possono formare con gli elementi dati, e che differiscono tra loro soltanto per l'**ordine degli elementi**.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot ..... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

In pratica la permutazione di *n* oggetti coincide con il prodotto dei primi *n* numeri naturali diversi da 0.

Nota: se *a* è un numero naturale maggiore di 1, il prodotto dei primi *a* numeri naturali si chiama **fattoriale** del numero *a*, e si indica con *a!*. Es. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ 1!=1 0!=1

Es. Gli anagrammi sono delle permutazioni che si ottengono da una parola qualunque, mutando solo l'ordine delle sue lettere (solo parole formate da lettere tutte diverse).
Quanti sono gli anagrammi della parola "amore" ? $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ anagrammi

1.3 COMBINAZIONI

Nelle combinazioni semplici due gruppi si considerano distinti quando differiscono per **almeno un elemento.**
Le combinazioni $C_{n,k}$ si calcolano nel seguente modo:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Es. Ad una riunione partecipano 6 persone: se ogni persona ha stretto la mano a tutte le altre, quante strette di mano vi sono state? $C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

2. CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Si chiama probabilità P di un evento aleatorio E, previsto da una determinata prova, il quoziente fra il numero dei risultati favorevoli e il numero dei risultati possibili della prova, nell'ipotesi che siano tutti egualmente possibili.

$$P(E) = \frac{casi\ \ favorevoli}{casi\ \ possibili}$$

Es. La probabilità che lanciando una moneta esca croce è ½ : un caso favorevole su due possibili.

Proprietà

- la probabilità è quindi un numero sempre compreso tra 0 e 1 (perché il numeratore è sempre minore o al massimo uguale al denominatore)

  quando P(E) = 0 l'evento E è impossibile
  quando P(E) = 1 l'evento E è certo

- due eventi E ed F si dicono *opposti* quando il non verificarsi di E implica il verificarsi di F
  l'evento opposto di E viene anche detto *complementare* e si indica con $\underline{E}$
  se E ed $\underline{E}$ sono due eventi opposti la loro somma è uguale a 1:

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1 \quad \rightarrow \quad P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

- Siano E ed F due eventi *incompatibili*; la probabilità che si verifichi E **oppure** F è uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi
  Nota: due eventi si dicono *incompatibili* quando non possono accadere contemporaneamente

  Es. la probabilità che dal lancio di un dado esca 1 **oppure** 6 è $P_{1,6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

- Siano E ed F due eventi *Indipendenti*; la probabilità che si verifichino **contemporaneamente** è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi
  Nota: due eventi si dicono *indipendenti* se il realizzarsi di uno non implica il realizzarsi del secondo
  Es. La probabilità che lanciando due volte un dado, esca due volte il numero 1 è:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

3. MEDIA ARITMETICA

La media di n numeri si ottiene facendo la somma degli n numeri divisa per n .

Media di $P = x_1 + x_2 ... + x_n = \frac{x_1 + x_2 ... + x_n}{n}$

Nota: non si possono fare medie parziali e poi fare la media totale di medie parziali, ogni volta si deve fare la somma di tutti i singoli elementi.

Es. Giga dopo 3 esami ha la media del 19, nel quarto prende 25, che media ha Giga? Si devono ipotizzare tre voti che abbiano come media 19 (per comodità prendiamo 19, 19 e 19).
Il calcolo è quindi: $\frac{19 + 19 + 19 + 25}{4}$ e non $\frac{19 + 25}{2}$.

4. MEDIA PONDERATA

Nella media ponderata ad ogni elemento viene associato un valore e quindi i diversi elementi all'interno della media non avranno più lo stesso peso.

Media ponderata $= \frac{x_1 \cdot k_1 + x_2 \cdot k_2 + ... + x_n \cdot k_n}{k_1 + k_2 + ... + k_n}$